Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

I

art
educațional

Cuprins

Algebră

I. Numere reale

Geometrie

II. Patrulatere

III. Cercul

IV. Variante de subiecte pentru teză

I.1 Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Pătrat perfect. Un număr natural a se numește *pătrat perfect* dacă există un număr natural n astfel încât $n^2 = a$.
Rădăcina pătrată. Fie a un număr natural pătrat perfect. Numărul natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului a și se notează $n = \sqrt{a}$.

Exemple: $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este n, și anume $\sqrt{n}$ și $-\sqrt{n}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple: 1 $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$. 2 $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Exersare

1 Completați următorul tabel, știind că x este număr natural:

x	2	5		8			11		25
x^2			9		36	49		144	

2 Dintre următoarele numere, alegeți-le pe cele care sunt pătrate perfecte:
8, 16, 26, 49, 91, 121, 150, 196, 200, 324.

3 a Scrieți pătratele perfecte de două cifre.
b Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 300 și 500.

4 Determinați numerele întregi care au pătratul egal cu:
a 16; b 81; c 144; d 576; e 2025.

5 Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:
a 9; b 36; c 64; d 121; e 400;
f $3^2 \cdot 16$; g $25 \cdot 81 \cdot 7^2$; h $4^5 \cdot 4^4$; i $25^3 \cdot 7^{10}$; j $121 \cdot 49^3$.

6 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:
a $\sqrt{64} = 8$; b $\sqrt{100^2} = 100$; c $\sqrt{(-5)^2} = -5$; d $\sqrt{81} = 9$;
e $\sqrt{5^2} = 5$; f $\sqrt{(-7)^2} = 7$; g $\sqrt{(-3)^2} = -3$; h $\sqrt{16} = \sqrt{4}$.

7 Efectuați calculele:

a $\sqrt{7^2}$; b $\sqrt{9^2}$; c $\sqrt{15^2}$; d $\sqrt{20^2}$;

e $\sqrt{(-10)^2}$; f $\sqrt{(-16)^2}$; g $\sqrt{(-30)^2}$; h $\sqrt{(-45)^2}$.

8 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$; b $a = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$;

c $a = 9^2 + 12^2$; d $a = 7^2 + 24^2$.

9 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + ... + 49$; b $a = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 31$;

c $a = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2\,011$; d $a = (2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2\,012) + 1\,007$;

e $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 24) + 25$; f $a = (3 + 6 + 9 + 12 + ... + 147) + 1\,225$.

10 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect, după care aflați $\sqrt{a}$:

a $a = (1 + 2 + 3 + ... + 50) - 25 \cdot 2$; b $a = 1 + 2 + 3 + ... + 120 + 4 \cdot 121$;

c $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 225) - 225^2$; d $a = 3 \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 99) - 5\,000$;

e $a = (60 \cdot 4 + 60^2) + (64^2 - 64 \cdot 43)$; f $a = 101^2 - 2 \cdot 99 \cdot 101 + 99^2$.

11 Dați trei exemple de numere naturale care sunt atât pătrate perfecte, cât și cuburi perfecte.

12 Calculați:

a $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$; b $\sqrt{1} + \sqrt{25} - \sqrt{0}$; c $\sqrt{36} + \sqrt{64}$; d $\sqrt{100} - \sqrt{49}$.

Consolidare

13 Calculați, apoi verificați rezultatele folosind minicalculatorul:

a $\sqrt{169}$; b $\sqrt{196}$; c $\sqrt{289}$; d $\sqrt{361}$;

e $\sqrt{441}$; f $\sqrt{529}$; g $\sqrt{676}$; h $\sqrt{729}$.

14 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, punând în evidență faptul că sunt situate între pătratele a două numere naturale consecutive:

a 8; b 12; c 24; d 95; e 250; f 500.

15 Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte,

a $a = 5n + 13$; b $b = 10n + 8$; c $c = 10n + 12$; d $d = 5n + 18$.

Rezolvare: **a.** Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a lui a poate fi 3 sau 8. Cum ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că a nu este pătrat perfect.

16 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, unde $m \in \mathbb{N}$:

a $a = 1^m + 5$; b $a = 5^m + 7$; c $a = 6^m + 6$;

d $a = 10^m + 13$; e $a = 15^m + 18$; f $a = 31^m + 31$.

17 Arătați că numărul $N = \sqrt{5^{2n+1} \cdot 9^{n+1} + 25^n \cdot 3^{2n+2} \cdot 11}$ este natural, oricare ar fi numărul natural n.

18 Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte:

a $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$; b $b = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{153}$;

c $c = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{17})$; d $d = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{83})$.

19 Calculați:

a $\sqrt{2^4}$; b $\sqrt{3^4}$; c $\sqrt{11^6}$; d $\sqrt{23^8}$;

e $\sqrt{31^8}$; f $\sqrt{6^{14}}$; g $\sqrt{11^{22}}$; h $\sqrt{59^{12}}$;

i $\sqrt{5^{28}}$; j $\sqrt{9^{24}}$; k $\sqrt{20^{20}}$; l $\sqrt{12^{44}}$.

20 Calculați:

a $\sqrt{3^4\cdot 5^6}$; b $\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 7^6}$; c $\sqrt{5^{10}\cdot 7^{20}}$; d $\sqrt{3^{14}\cdot 7^4\cdot 17^8}$;

e $\sqrt{2^8\cdot 7^2}$; f $\sqrt{2^{10}\cdot 5^{20}\cdot 11^{30}}$; g $\sqrt{3^{52}\cdot 11^{40}}$; h $\sqrt{9^{10}\cdot 11^{12}\cdot 13^{14}}$.

Rezolvare: f. $\sqrt{2^{10}\cdot 5^{20}\cdot 11^{30}}=\sqrt{(2^5)^2\cdot(5^{10})^2\cdot(11^{15})^2}=\sqrt{(2^5\cdot 5^{10}\cdot 11^{15})^2}=2^5\cdot 5^{10}\cdot 11^{15}$.

21 Calculați:

a $\sqrt{(-29)^2}$; b $\sqrt{(-29)^4}$; c $\sqrt{(-29)^8}$; d $\sqrt{(-19)^2}$;

e $\sqrt{(-51)^4}$; f $\sqrt{(-72)^2}$; g $\sqrt{(-2)^4}$; h $\sqrt{7^{42}}$;

i $\sqrt{2^{2000}}$; j $\sqrt{3^{2012}}$; k $\sqrt{(-6)^{2012}}$; l $\sqrt{(-7)^{7700}}$.

22 Folosind descompunerea în produs de puteri de factori primi, calculați:

a $\sqrt{576}$; b $\sqrt{625}$; c $\sqrt{324}$; d $\sqrt{400}$;

e $\sqrt{900}$; f $\sqrt{2025}$; g $\sqrt{3600}$; h $\sqrt{5625}$.

23 Folosind minicalculatorul, calculați:

a $\sqrt{6724}$; b $\sqrt{8281}$; c $\sqrt{20164}$; d $\sqrt{12100}$;

e $\sqrt{64516}$; f $\sqrt{84100}$; g $\sqrt{112896}$; h $\sqrt{164836}$.

24 Calculați:

a $\sqrt{25}+\sqrt{36}-\sqrt{49}$; b $\sqrt{100}\cdot\sqrt{16}-\sqrt{144}$;

c $3\cdot\sqrt{225}+12\sqrt{121}-\sqrt{169}$; d $5\sqrt{81}-\sqrt{64}\cdot\sqrt{196}+2\sqrt{100}$;

e $\sqrt{576}-\sqrt{625}+\sqrt{729}-\sqrt{841}+\sqrt{900}$; f $\sqrt{6400}-\sqrt{2025}+\sqrt{3364}-\sqrt{5184}-\sqrt{441}$.

25 Calculați:

a $\sqrt{2304}\cdot(\sqrt{225}-\sqrt{1225})+\sqrt{1600}$; b $\sqrt{5\cdot\sqrt{25}}+\sqrt{7\cdot\sqrt{49}}-\sqrt{9\cdot\sqrt{16}}$;

c $\sqrt{1+7\cdot\sqrt{25}}-\sqrt{11\cdot\sqrt{36}-2}+\sqrt{23\cdot\sqrt{9}+3\cdot\sqrt{16}}$; d $\sqrt{\sqrt{144}+13}+\sqrt{3\cdot\sqrt{324}+7\cdot\sqrt{225}-\sqrt{64}-7}$.

26 Calculați:

a $\sqrt{5^3\cdot 5}$; b $\sqrt{7^4\cdot 4}$; c $\sqrt{3^4\cdot 5^2\cdot 36}$;

d $\sqrt{144\cdot 3^2\cdot 64}$; e $\sqrt{21^2\cdot 23^2}$; f $\sqrt{9^2-6^2+2^2}$;

g $\sqrt{64^2-63^2+4^2+1^2}$; h $\sqrt{2^6\cdot(7^2-2^4\cdot 3)}$; i $\sqrt{5\cdot(9^2-6^2)}$.

27 Efectuați calculele:

a $\sqrt{2^2\cdot 5+2^2\cdot 11}$; b $\sqrt{7^4\cdot 45+7^4\cdot 39-7^4\cdot 3}$; c $\sqrt{5^2\cdot 11+19\cdot 5^2+5^2\cdot 6}$;

d $\sqrt{3^4\cdot 19-3^4\cdot 10}$; e $\sqrt{2^2\cdot 3^4+2^2\cdot 3^2+2^3\cdot 3^3}$; f $\sqrt{2^4\cdot 5^2+2^3\cdot 5+1}$;

g $\sqrt{3^4+2\cdot 3^2\cdot 5^2+5^4}$; h $\sqrt{11^2-2\cdot 11\cdot 15+15^2}$; i $\sqrt{48^2-2\cdot 48\cdot 13+13^2}$.

28 Aflați x din relațiile:

a $\dfrac{x}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}$; **b** $\dfrac{\sqrt{25}}{x}=\dfrac{16}{\sqrt{64}}$;

c $\dfrac{0{,}5\cdot\sqrt{4}}{2^3-2^2}=\dfrac{x}{3^3-3^2-2}$; **d** $\dfrac{\sqrt{700-5\sqrt{225}}}{\sqrt{180+\sqrt{2025}}}=\dfrac{3\sqrt{200+\sqrt{625}}}{x}$.

29 Determinați numerele naturale x care verifică egalitățile:

a $2^x=\sqrt{4}$; **b** $2^x=\sqrt{16}$; **c** $3^x=\sqrt{81}$; **d** $\sqrt{1+2+3+\ldots+8}=6^x$;

e $4^x=\sqrt{1+3+3\cdot4+3\cdot4^2+\ldots+3\cdot4^{51}}$; **f** $5^x=\sqrt{1+4+4\cdot5+4\cdot5^2+\ldots+4\cdot5^{2011}}$;

g $6^x=\sqrt{6^4-5\cdot6^3-5\cdot6^2-5\cdot6-5}$; **h** $3x=\sqrt{3^{2012}-2\cdot3^{2011}-2\cdot3^{2010}-\ldots-2\cdot3-2}$.

Aprofundare

30 Calculați:

a $\sqrt{972-3\cdot\sqrt{576}}+\sqrt{1255-11\cdot\sqrt{441}}$; **b** $\sqrt{3258+18\cdot\sqrt{361}}+\sqrt{5000+40\cdot\sqrt{1225}}$;

c $\sqrt{6525-15\cdot\sqrt{3600}}-\sqrt{905-20\cdot\sqrt{196}}$ **d** $\sqrt{673-12\cdot\sqrt{1024}}+\sqrt{891+11\cdot\sqrt{324}}$.

31 Există numere de forma $\overline{aa}$ care să fie pătrate perfecte?

32 Arătați că numărul $N=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2011+3$ nu este pătrat perfect.

33 Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$:

a 2^{4n+2}; **b** 9^{n+1}; **c** 7^{6n}; **d** 15^{n^2+n}.

34 Se consideră numerele $A=\overline{ab}$ și $B=\overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

a Scrieți toate numerele A care sunt pătrate perfecte;

b Scrieți cel mai mare număr A, pentru care $\sqrt{A+B}$ este număr natural.

35 Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{aa}+\overline{bb}$ să fie pătrat perfect.

36 Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care numărul $x=\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}+4a+4b}$ este natural.

37 Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care numărul $x=\sqrt{\overline{ab}+2\cdot\overline{ba}+a-8b}$ este natural.

Probleme de șapte stele

38 Determinați numerele naturale de forma $A=\overline{46ab}$ și $B=\overline{2xyz}$, care sunt pătrate perfecte.

39 Fie n un număr natural nenul. Arătați că numărul $a=2+4+6+\ldots+2n$ nu este pătrat perfect.

40 Fie $x, y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2009}$. Arătați că $\sqrt{\left(\dfrac{x}{41}-49\right)\left(\dfrac{y}{41}-49\right)}\in\mathbb{N}$.

I.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă

I.2.1 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv

Rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv a este numărul pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$. Se notează $x = \sqrt{a}$ și se citește *radical din a*.

Exemple: **1** $\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}$; **2** $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; **3** $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.

Proprietăți:

1 $\sqrt{a} \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+$.

2 $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}_+$.

3 $\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice $a \in \mathbb{Q}$.

Exersare

1 Completați următorul tabel:

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{7}{10}$	0,3	−1,2	0,(4)	1,(6)	−0,1(6)
x^2									

2 Completați următorul tabel:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{144}{49}$	$\frac{400}{121}$	0,64	1,96	6,25	0,01	0,0121
$\sqrt{x}$									

3 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a $\sqrt{25} = 5$; b $\sqrt{81} = -9$; c $\sqrt{36} = \pm 6$;

d $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$; e $\sqrt{\frac{18}{2}} = 3$; f $\sqrt{\frac{125}{45}} = \frac{5}{3}$.

4 Dacă $A = \frac{20^2 - 16^2}{3^2} + \frac{12^2 + 9^2}{5^2}$, arătați că $\sqrt{A}$ este număr natural.

5 Dacă $B = \sqrt{\frac{16}{9}} + \sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{36} + \sqrt{64}$, arătați că B este număr natural.

6 Fie mulțimea $A=\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{5};0;7;3,(5);-2\frac{1}{3}\right\}$.

Determinați elementele mulțimii $B=\{y \mid y=\sqrt{x^2} \text{ și } x\in A\}$.

7 Calculați:

a $\sqrt{\frac{4}{9}}$; b $\sqrt{\frac{25}{49}}$; c $\sqrt{\frac{81}{100}}$; d $\sqrt{\frac{225}{121}}$;

e $\sqrt{\frac{169}{144}}$; f $\sqrt{\frac{81}{324}}$; g $\sqrt{\frac{361}{625}}$; h $\sqrt{\frac{196}{289}}$.

8 Calculați:

a $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; b $\sqrt{1\frac{24}{25}}$; c $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; d $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$; e $\sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}$; f $\sqrt{\frac{19^2}{13^2}}$;

g $\sqrt{\frac{23^2}{37^2}}$; h $\sqrt{\frac{5^4}{7^4}}$; i $\sqrt{\frac{3^8}{5^6}}$; j $\sqrt{\frac{4^3}{9^5}}$; k $\sqrt{\frac{3^6\cdot 2^4}{5^2}}$; l) $\sqrt{\frac{14^2}{11^2\cdot 3^2}}$.

Rezolvă problema chiar aici:

Consolidare

9 Calculați:

a $\sqrt{0,36}$; b $\sqrt{0,09}$; c $\sqrt{2,25}$; d $\sqrt{1,44}$; e $\sqrt{5,76}$; f $\sqrt{0,0169}$.

10 Folosind eventual minicalculatorul, calculați:

a $\sqrt{5,3361}$; b $\sqrt{6,3504}$; c $\sqrt{29,4849}$; d $\sqrt{144,7209}$; e $\sqrt{1,258884}$.

11 Efectuați:

a $2\frac{1}{3}\cdot\sqrt{0,09}+3\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,04}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{0,36}$;

b $1\frac{1}{4}\cdot\sqrt{0,0225}-0,(3)\cdot\sqrt{0,81}+0,2(7)\cdot\sqrt{0,0324}$;

c $2,(3)\cdot\sqrt{0,(1)}+\sqrt{\frac{324}{25}}:\sqrt{\frac{81}{225}}-\sqrt{1024}:\sqrt{64}$.

Rezolvă problema chiar aici:

12 Efectuați:

a $(3\sqrt{49}-2\cdot\sqrt{25}):\sqrt{121}$;

b $(13\sqrt{144}-5\cdot\sqrt{196})\cdot\sqrt{\sqrt{361}-\sqrt{225}}$;

c $\sqrt{3^4+3^2\cdot2+1}\cdot(2\cdot\sqrt{1296}-3\cdot\sqrt{841})$;

d $(3\cdot\sqrt{2025}+2\cdot\sqrt{3600}-5\cdot\sqrt{1764}):\sqrt{(3^5-2^6\cdot3-6)^2}$;

e $(2\cdot\sqrt{5625}+6\cdot\sqrt{2704}-2\cdot\sqrt{961}):(3\sqrt{6561}-\sqrt{1849})$.

13 Aflați numerele raționale x care verifică egalitățile:

a $\dfrac{\sqrt{49\cdot169}-7\sqrt{81}}{\sqrt{576}+24\cdot\sqrt{\frac{1521}{64}}}=\dfrac{x\cdot\sqrt{49}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{729}{100}}}$;

b $\dfrac{x}{\sqrt{\frac{900}{49}}-\sqrt{\frac{784}{225}}\cdot\frac{15}{7}}=\dfrac{\sqrt{676}-\sqrt{576}}{0,(5)\cdot\sqrt{\frac{1296}{625}}}$.

14 Arătați că numărul x este număr natural pătrat perfect, unde:

$$x=\sqrt{3\cdot0,(3)}+\sqrt{30\cdot0,0(3)}+\sqrt{300\cdot0,00(3)}+\sqrt{3000\cdot0,000(3)}.$$

15 Arătați că numărul x este natural, unde:

$$x=\sqrt{\frac{19}{2,(1)}}+\sqrt{\frac{20}{2,(2)}}+\sqrt{\frac{21}{2,(3)}}+\ldots+\sqrt{\frac{26}{2,(8)}}.$$

16 Aflați cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu:

a $\sqrt{573}$; b $\sqrt{256,14}$; c $-\sqrt{129}$; d $-\sqrt{2\,345,753}$.

17 Aflați cel mai mic număr întreg mai mare sau egal cu:

a $\sqrt{200}$; b $-\sqrt{168}$; c $\sqrt{25,64}$; d $-\sqrt{3601,4}$.

Aprofundare

18 Fie numărul $A = 3^{2n} \cdot 25^{n+1} - 9^{n+1} \cdot 5^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a Arătați că numărul A este pătrat perfect.

b Arătați că $\sqrt{A}$ este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c Determinați valoarea numărului n pentru care $\sqrt{A}$ nu se divide cu 15.

19 Calculați:

a $x = \sqrt{\frac{74}{71} \cdot \left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{36\cdot 37}\right) - \left(\frac{1}{37\cdot 38} + \frac{1}{38\cdot 39} + \ldots + \frac{1}{73\cdot 74}\right)\right]}$;

b $x = \sqrt{80\cdot 82 \cdot \left[\left(\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{2}{39\cdot 41}\right) - \left(\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{3}{37\cdot 40}\right)\right]}$.

20 Determinați cifrele nenule distincte x și y pentru care:

a $\sqrt{1,(x) + 4,(y)}$ este număr rațional; **b** $\sqrt{0,x(y) + 0,y(x)}$ este număr natural.

21 Determinați numărul natural n astfel încât să existe următorii radicali:

a $\sqrt{4-n}$; **b** $\sqrt{2n-6}$; **c** $\sqrt{\frac{5-n}{11}}$; **d** $-\sqrt{\frac{13-3n}{2}}$.

22 Determinați numărul natural n astfel încât următorii radicali să aibă sens și să fie numere raționale:

a $\sqrt{9-n}$; **b** $\sqrt{16-3n}$; **c** $\sqrt{\frac{10-n}{7}}$; **d** $-\sqrt{\frac{21-3n}{2}}$.

Probleme de șapte stele

23 Determinați mulțimile:

a $A = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x = \sqrt{\frac{15-2n}{5}},\ n \in \mathbb{N}\right\}$; **b** $B = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x = \sqrt{\frac{25-3n}{2n+3}},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

24 Fie a și b două numere raționale astfel încât $1 \le a \le 3$ și $-3 \le b \le 1$. Arătați că expresia $E = \sqrt{(2a+b-7)^2} + |a-b| + \sqrt{(a+2b+5)^2}$ nu depinde de a și b.

25 Determinați cifrele nenule și distincte a, b, c, cu $a < b < c$, pentru care numărul $x = \sqrt{a,b(c) + b,c(a) + c,a(b)}$ este rațional.

I.2.2 Mulțimea numerelor reale. Modulul unui număr real. Compararea numerelor reale. Reprezentarea pe axă

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ reprezintă mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ este mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q} = \left\{x \;\middle|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \text{astfel încât } x = \frac{a}{b}\right\}$ este mulțimea numerelor raționale.

Diferite probleme geometrice conduc la evidențierea unor numere care nu sunt raționale (spre exemplu, vom învăța că un pătrat cu latura de 1 m are diagonala de lungime $\sqrt{2}$ m sau că un triunghi echilateral cu latura de 2 cm are înălțimea de lungime $\sqrt{3}$ cm). De asemenea, vom vedea că raportul dintre lungimea oricărui cerc și diametrul său este numărul $\pi = 3{,}1415...$, care nu este număr rațional.

Vom numi astfel de numere *numere iraționale*. Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, obținem *mulțimea numerelor reale*, pe care o vom nota cu $\mathbb{R}$. Avem incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Vom nota cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sau $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) mulțimea *numerelor iraționale*. În scrierea ca fracție zecimală, numerele iraționale au partea zecimală infinită și neperiodică.

Exemple de numere iraționale

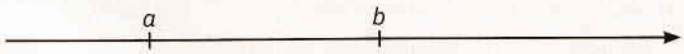
1 $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{7},\ -3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}+7,\ -4\sqrt{3}+5;$

2 0,1010010001000010... (după fiecare cifră 1 numărul zerourilor scrise crește cu 1).

Modulul unui număr real x, notat $|x|$, este distanța de la origine la punctul ce îl reprezintă pe o axă a numerelor.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Compararea numerelor reale. Fie a și b două numere reale astfel încât a este reprezentat pe axa numerelor la stânga lui b. Spunem că a este mai mic decât b și scriem $a < b$ sau spunem că b este mai mare ca a și scriem $b > a$.



Dacă $a < b$ sau $a = b$ spunem că a este mai mic sau egal cu b și scriem $a \leq b$ sau că b este mai mare sau egal cu a și scriem $b \geq a$.

Exersare

1 Completați următorul tabel:

x	6	−15	$-\frac{2}{9}$	$\frac{12}{5}$	0,9	−3,14	1,(54)	5,1(5)	−2,15(1)
$\|x\|$						3,14			
$-x$						3,14			

2 Dați trei exemple de numere:

a naturale; b întregi, care nu sunt naturale; c raționale, care nu sunt întregi.

3 Stabiliți care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false:

a $3 \in \mathbb{N}$; b $-\frac{8}{2} \in \mathbb{Z}$; c $0 \notin \mathbb{N}$; d $\frac{2}{3} \in \mathbb{N}$;

e $2{,}5 \in \mathbb{Q}$; f $\sqrt{12} \in \mathbb{R}$; g $\sqrt{12} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h $-2\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4 Se consideră numerele: -4; $0,(3)$ $-\sqrt{25}$; $1,2(5)$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{(-7)^2}$; 1.
Dintre aceste numere:
a numerele naturale sunt...; b numerele negative sunt...; c numerele întregi sunt...;
d numerele reale sunt...; e numerele raționale sunt...; f numerele iraționale sunt... .

5 Arătați că numerele următoare sunt raționale:

a $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; b $\sqrt{0,(4)}$; c $\sqrt{2^2 \cdot 3^6}$; d $-\sqrt{2\frac{7}{9}}$; e $\sqrt{1,5625}$.

6 Stabiliți care dintre numerele următoare sunt raționale și care sunt iraționale:
a $\sqrt{3^2 \cdot 2^4}$; b $\sqrt{5^3 \cdot 3^2}$; c $\sqrt{5^2 - 3^2}$;

d $\sqrt{7+\frac{1}{9}}$; e $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; f $\sqrt{27}$.

7 Fie mulțimea $A=\left\{-\frac{5}{7};\ -\sqrt{25};\ \frac{-15}{-3};\ 7,1;\ 4\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{81}}{3};\ \sqrt{1,(7)};\ \sqrt{12}\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor:
$A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A - \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{R}$.

8 Fie mulțimea $A=\left\{-\sqrt{16};\ -\frac{1}{2};\ \frac{75}{3};\ 0,1;\ \frac{\sqrt{36}}{2};\ -3;\ 2,1(3);\ \sqrt{2^6 \cdot 5^2};\ \sqrt{28}\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor:
$A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{Q}$; $A - \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

9 Scrieți valoarea absolută (modulul) numerelor:
a -14; b $3,75$; c 0; d $\sqrt{15}$;

e $-\frac{1}{7}$; f $\frac{-12}{5}$; g $\frac{2}{3}$; h $-3\sqrt{7}$.

10 Reprezentați pe axa numerelor reale, folosind o unitate de măsură de 1 cm, următoarele numere:

a $-2; -1; 3; 0; 2; -3$; b $\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2};\ -1,5;\ -3\frac{1}{2};\ -2,5;\ 0,5$;

c $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; 1,5; -1,5$; d $\sqrt{5}; -2,5; 1,5; -\sqrt{5}; 2,5; -0,5$.

11 Reprezentați următoarele puncte pe axă, folosind o unitate de măsură de 3 centimetri:
a $A\left(\frac{2}{3}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{4}}{2}\right)$; $C\,(2,(6))$; $D\left(-\frac{4}{3}\right)$; b $E(\sqrt{8})$; $F(-\sqrt{3})$; $G(-\sqrt{2}+1)$; $H(\sqrt{3}-1)$.

12 Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:
a $\square < -\sqrt{3} < \square$; b $\square < \sqrt{7} < \square$; c $\square < -\sqrt{12} < \square$;
d $\square < -\sqrt{48} < \square$; e $\square < -\sqrt{17} < \square$; f $\square < -\sqrt{99} < \square$.

Consolidare

13 a Dați două exemple de numere reale cuprinse între 3 și 4.
b Dați două exemple de numere reale cuprinse între 1,3 și 1,4.